

Aristarchovo měření vesmíru Eratosthenovo měření Země

Jindřich Bečvář

Katedra didaktiky matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Třeboň, 28. května 2013

becvar@karlin.mff.cuni.cz

www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar

www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm



Osnova

1 Úvod

2 Aristarchos

3 Eratosthenés

4 Literatura

Úvod

■ Pýthagorás ze Samu (asi 570–500)

Země má tvar koule, rotuje, je středem vesmíru (kosmu).

Vesmír je nehybná dutá koule, kterou ohraničuje sféra stálic.

Úvod

■ Pýthagorás ze Samu (asi 570–500)

Země má tvar koule, rotuje, je středem vesmíru (kosmu).

Vesmír je nehybná dutá koule, kterou ohraničuje sféra stálic.

■ Pýthagorejci, Filoláos (5. století př. Kr.)

Ve středu kosmu je centrální oheň, kolem něho je 10 sfér s nebeskými tělesy.

Idea dokonalosti.

Vztah matematiky, kosmologie a hudby – harmonie kosmu, hudba sfér.

■ Platón (427–347)

Dokonalost kulovitého tvaru, dokonalost rovnoměrného kruhového pohybu.

Pozorované nepravidelnosti jsou jen zdánlivé, skutečné pohyby jsou pravidelné.

■ Platón (427–347)

Dokonalost kulovitého tvaru, dokonalost rovnoměrného kruhového pohybu.

Pozorované nepravidelnosti jsou jen zdánlivé, skutečné pohyby jsou pravidelné.

■ Eudoxos z Knidu (408–355)

Geocentrický názor, systém homocentrických sfér. Celkem 27 sfér (stálice – 1, Slunce – 3, Měsíc – 3, pět planet – 5×4).

Modelování zdánlivých pohybů planet skládáním rovnoměrných kruhových pohybů.

Model? Skutečnost? Matematické zpracování? Předpovědi?

■ Aristotelés ze Stageiry (384–322)

Střed Země, střed vesmíru a střed tíže jsou ve stejném bodě.

Přirozeným stavem je klid. Pohyb vyvolává síla.

Čtyři živly (země, voda, vzduch, oheň).

Přirozená místa, přirozené pohyby.

Éter. Dva světy oddělené sférou Měsíce. Celkem 59 sfér.

■ Aristotelés ze Stageiry (384–322)

Střed Země, střed vesmíru a střed tíže jsou ve stejném bodě.
Přirozeným stavem je klid. Pohyb vyvolává síla.
Čtyři živly (země, voda, vzduch, oheň).
Přirozená místa, přirozené pohyby.
Éter. Dva světy oddělené sférou Měsíce. Celkem 59 sfér.

■ Nedostatky Eudoxovy a Aristotelovy teorie

Nevysvětluje změny jasnosti planet.
Nevysvětluje změny velikosti Slunce a Měsíce na obloze.

■ Hérakleidés z Pontu (asi 390–310)

Země rotuje, Merkur a Venuše obíhají kolem Slunce, Slunce obíhá kolem Země.

Teorie epicyklů. (?)

- Hérakleidés z Pontu (asi 390–310)

Země rotuje, Merkur a Venuše obíhají kolem Slunce, Slunce obíhá kolem Země.

Teorie epicyklů. (?)

- Eukleidés (kolem roku 300 př. Kr.)

Základy (Stoicheia, Elementa).

Exaktní budování matematické teorie (definice, postuláty, axiomy, věty a důkazy – význam předpokladů), metodický základ dal zejména Aristotelés.

- Hérakleidés z Pontu (asi 390–310)

Země rotuje, Merkur a Venuše obíhají kolem Slunce, Slunce obíhá kolem Země.

Teorie epicyklů. (?)

- Eukleidés (kolem roku 300 př. Kr.)

Základy (Stoicheia, Elementa).

Exaktní budování matematické teorie (definice, postuláty, axiomy, věty a důkazy – význam předpokladů), metodický základ dal zejména Aristotelés.

- Eukleidés podstatně ovlivnil své následovníky: Aristarcha, Eratosthena, Archiméda.

Aristarchos

■ Aristarchos ze Samu (asi 320–230)

Astronom, matematik, filozof, vynálezce přístrojů (*skafé*).

Pod výrazným vlivem Eukleida.

Aristarchova kosmologie (snad inspirována Hérakleidem):

- heliocentrický systém,
- hvězdy a Slunce jsou nehybné, Země rotuje a její sféra rotuje kolem Slunce.

Obviněn z bezbožnosti (... *ruší klid Země*).

Aristarchos

■ Aristarchos ze Samu (asi 320–230)

Astronom, matematik, filozof, vynálezce přístrojů (*skafé*).

Pod výrazným vlivem Eukleida.

Aristarchova kosmologie (snad inspirována Hérakleidem):

- heliocentrický systém,
- hvězdy a Slunce jsou nehybné, Země rotuje a její sféra rotuje kolem Slunce.

Obviněn z bezbožnosti (... *ruší klid Země*).

Svědectví o Aristarchově heliocentrismu je v Archimédově spise *Psammites* (*Počet pískový*), malé zmínky nacházíme později také u Plutarcha a Pappa.

Archimédés píše (Počet pískový):

*Aristarchos Samský však vydal knihy jakési s názvem *hypothesy*, v nichž vychází z jeho předpokladů, že vesmír jest mnohokrát větší, než jak výše bylo řečeno.*

Předpokládá totiž, že stálice a slunce zůstávají nehybné, země pak obíhá po obvodě kruhu kolem slunce, jež stojí uprostřed dráhy, že dále koule stálic rozložená kolem téhož středu jako slunce jest takové velikosti, že kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, jest ku vzdálenosti stálic v tomtéž poměru, v jakém jest střed koule k povrchu.

Totož, jak patrno, jest nemožno.

Neboť, ježto střed koule nemá žádné velikosti, jest se domnívati o něm, že není v žádném poměru k povrchu koule.

Archimédés se dále snaží vysvětlit tuto Aristarchovu myšlenku.

Jest však přijmout, že Aristarchos myslil takto: jakmile předpokládáme, že země jest jakoby středem vesmíru, tu v tom poměru, v jakém jest země k tomu, co nazýváme vesmírem, jest koule, v níž jest kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, ke kouli stálic. Neboť důkazy fénoménů přizpůsobuje k tomuto předpokladu, a obzvláště zdá se, že velikost koule, v níž dává zemi se pohybovat, pokládá za stejnou s tím, co nazýváme vesmírem.

Jest však přijmout, že Aristarchos myslil takto: jakmile předpokládáme, že země jest jakoby středem vesmíru, tu v tom poměru, v jakém jest země k tomu, co nazýváme vesmírem, jest koule, v níž jest kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, ke kouli stálic. Neboť důkazy fénoménů přizpůsobuje k tomuto předpokladu, a obzvláště zdá se, že velikost koule, v níž dává zemi se pohybovat, pokládá za stejnou s tím, co nazýváme vesmírem.

Otázky:

Zůstaly Aristarchovy názory jen ve formě tezí?

Existoval nějaký matematický model, podle něhož bylo možno dělat předpovědi?

■ Aristarchovo měření vesmíru

Dochovaný spis: *Peri megethón kai apostématón héliú kai selénés* (O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce).

Součástí tzv. *Malé skladby*, mnohokrát přepisované (díla několika astronomů).

- 1572 latinsky (F. Commandino),
- 1688 a 1699 řecky (J. Wallis),
- 1854 německy.

■ Aristarchovo měření vesmíru

Dochovaný spis: *Peri megethón kai apostématón héliú kai selénés* (O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce).

Součástí tzv. *Malé skladby*, mnohokrát přepisované (díla několika astronomů).

- 1572 latinsky (F. Commandino),
- 1688 a 1699 řecky (J. Wallis),
- 1854 německy.

■ Geometrický pokus určení poměrů velikostí a vzdáleností Země, Slunce a Měsíce.

■ Aristarchovo měření vesmíru

Dochovaný spis: *Peri megethón kai apostématón héliú kai selénés* (O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce).

Součástí tzv. *Malé skladby*, mnohokrát přepisované (díla několika astronomů).

- 1572 latinsky (F. Commandino),
- 1688 a 1699 řecky (J. Wallis),
- 1854 německy.

■ Geometrický pokus určení poměrů velikostí a vzdáleností Země, Slunce a Měsíce.

■ Pod velkým vlivem Eukleida

6 předpokladů (*hypothesis*), 18 vět.

ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΥ ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΙΟΥ ΚΑΙ ΣΕΛΗΝΗΣ

〈ΤΠΟΘΕΣΕΙΣ〉

α'. Τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν.

β'. Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν.

γ'. Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν δψιν τὸν διορίζοντα τὸ τε σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς σελήνης μέγιστον κύκλον.

δ'. Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἐλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ.

ε'. Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο.

ϛ'. Τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος τοῦ ζῳδίου.

Ἐπιλογίζεται οὖν τὸ τοῦ ἡλίου ἀπόστημα ἀπὸ τῆς γῆς τοῦ τῆς σελήνης ἀποστήματος μεῖζον μὲν ἡ ὀκτωκαιδεκαπλάσιον, ἐλασσον δὲ ἡ εἰκοσαπλάσιον, διὰ τῆς περὶ τὴν διχοτομίαν ὑποθέσεως· τὸν

Předpoklady

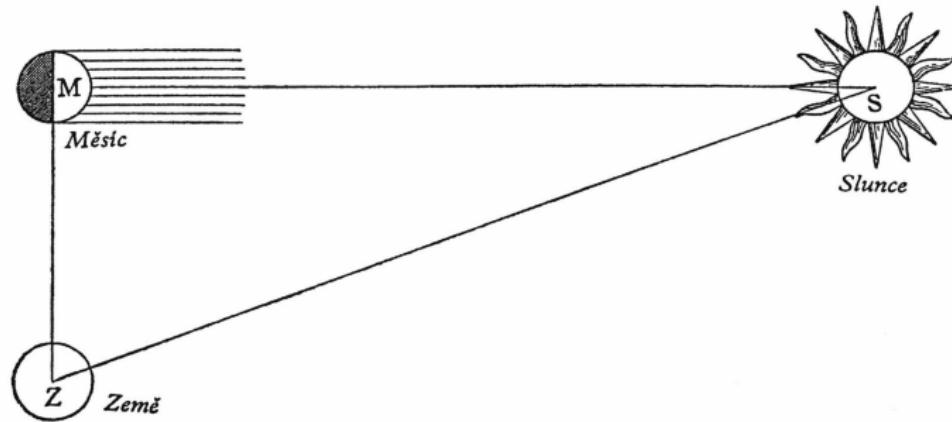
1. Měsíc získává své světlo od Slunce.
2. Země je v poměru bodu a středu ke sféře, na které se pohybuje Měsíc.
3. Když se Měsíc jeví rozprášený, pak velký kruh dělíci temnou a světlou část Měsíce je ve směru našeho pohledu.
4. Když se Měsíc jeví rozprášený, jeho vzdálenost od Slunce je rovna kvadrantu zmenšenému o jednu třetinu.
5. Šířka stínu Země je rovna šířce dvou Měsíců.
6. Měsíc zaujímá patnáctou část jednoho znamení zodiaku.
(Správně má být šedesátou část !!!)

■ Hlavní výsledky

- Slunce je od Země asi $19\times$ dále než Měsíc.
- Průměr Slunce je asi $19\times$ větší než průměr Měsíce.
- Průměr Slunce je asi $6,75\times$ větší než průměr Země a průměr Měsíce asi $0,36$ průměru Země.
- Vzdálenost Země od Slunce je asi $720\times$ větší než průměr Země.
- Poloměr sféry hvězd je asi $1\,036\,800\times$ větší než průměr Země.

- Aristarchova metoda zjištění poměrů vzdáleností Slunce od Země a Měsíce od Země

Založena na změření velikosti úhlu, který svírají spojnice Země-Měsíc a Země-Slunce v okamžiku, kdy je Sluncem osvětlena přesně polovina měsíčního kotouče.



■ Problémy metody

- Přesné určení okamžiku první (poslední) čtvrti.
- Přesné změření úhlu (objekty nejsou bodové).
- Malá nepřesnost v určení úhlu vede k obrovské chybě ve výsledku.

■ Problémy metody

- Přesné určení okamžiku první (poslední) čtvrti.
- Přesné změření úhlu (objekty nejsou bodové).
- Malá nepřesnost v určení úhlu vede k obrovské chybě ve výsledku.
 - Aristarchos uvádí velikost uvažovaného úhlu: 87° .
 - Správná hodnota je však $89^\circ 51'$.

Tato nepřesnost vede k velké chybě ve výsledku

$$\cos 87^\circ \doteq \frac{1}{19}, \quad \cos 89^\circ \doteq \frac{1}{58}, \quad \cos 89^\circ 50' \doteq \frac{1}{343}.$$

Přesné změření úhlu je těžké.

Ve skutečnosti je Slunce od Země asi $390\times$ dalej než Měsíc.

■ Archistarchovo určení poměru velikostí Slunce a Měsíce

Vzhledem k tomu, že jsou kotoučky Slunce a Měsíce na obloze zhruba stejně veliké, jsou jejich skutečné průměry ve stejném poměru jako jejich vzdálenosti od Země, tj. 19 : 1.

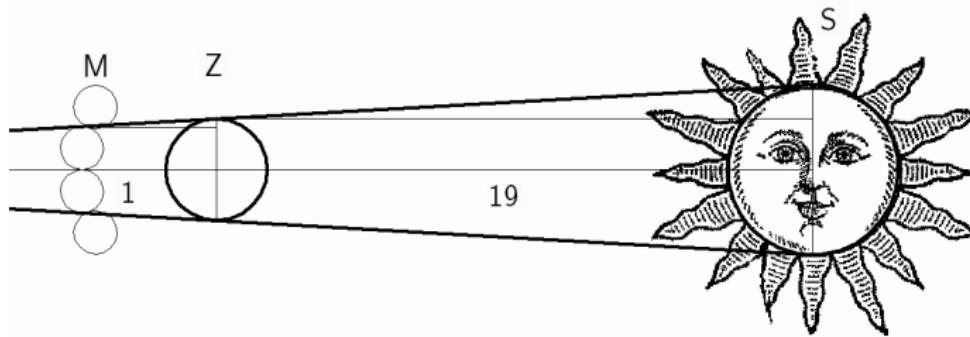
Tento fakt vyplývá z podobnosti.

- Aristarchova metoda zjištění poměrů velikostí Země, Slunce a Měsíce

Založena na pozorování zatmění Měsíce. Průměr zemského stínu ve vzdálenosti Měsíce je podle Aristarcha $2\times$ větší než je průměr Měsíce. Měsíc totiž vstupuje do zemského stínu stejnou dobu jako je ve stínu a jako ze stínu vystupuje.

Ve skutečnosti je průměr stínu Země ve vzdálenosti Měsíce asi $2,6\times$ větší než průměr Měsíce.

Z podobnosti trojúhelníků a z předchozích výsledků vyplývá, že poloměr Slunce je asi $6,75\times$ větší než poloměr Země a poloměr Měsíce je asi 0,36 poloměru Země. Vyplývá to z následující úvahy.



Z podobnosti trojúhelníků

$$(r_Z - 2 r_M) : 1 = (r_S - r_Z) : 19 = (19 r_M - r_Z) : 19.$$

Odtud

$$r_M = 0,36 r_Z, \quad r_S = 6,75 r_Z.$$

■ Hodnocení

Aristarchův správný postup je velmi negativně ovlivněn předchozími značně nepřesnými výsledky.

Ve skutečnosti je průměr Slunce asi $109\times$ větší než průměr Země.



Nyní je třeba dát do souvislosti velikosti Země, Slunce a Měsíce a jejich vzdálenosti.

■ Poměr velikosti průměru Země a vzdálenosti Země od Slunce

Vypočteme ze 6. předpokladu.

Zde je v textu chyba: místo patnáctá část má být šedesátá část jednoho znamení zodiaku, jak uvádí již Archimédés (chyba patrně vznikla pozdějším přepisem).

Po opravě této chyby vychází, že vzdálenost Země od Slunce je asi $720 \times$ větší než průměr Země a vzdálenost Měsíce od Země je asi $38 \times$ větší než průměr Země.

Výpočet: po obvodu největšího kruhu vesmíru lze rozmiřit 720 Sluncí, obvod je tedy roven $6,75 \cdot 720$ průměrů Země a poloměr tohoto kruhu je tedy asi 720 průměrů Země.

$$ZS = (6,75 \cdot 2r_Z \cdot 720) : 2\pi = 720 \cdot 2r_Z$$

$$ZM = (720 \cdot 2r_Z) : 19 = 38 \cdot 2r_Z$$

■ Velikost sféry hvězd

Vypočtena z Aristarchova předpokladu (viz Archimédés):

Poměr průměru Země k průměru vesmíru je roven poměru průměru vesmíru k průměru sféry stálic.

■ Velikost sféry hvězd

Vypočtena z Aristarchova předpokladu (viz Archimédés):

Poměr průměru Země k průměru vesmíru je roven poměru průměru vesmíru k průměru sféry stálic.

V symbolech

$$r_Z : ZS = ZS : SH$$

Odtud

$$SH = \frac{ZS \times ZS}{r_Z} = 720 \cdot 2 \cdot 720 \cdot 2r_Z = 1\,036\,800 \cdot 2r_Z$$

- Srovnání rozměrů vesmíru podle Aristarcha s dnešními hodnotami:

	Aristarchos (podle Archiméda)	Skutečnost
průměr Země	1	1
průměr Slunce	6,75	109
průměr Měsíce	0,36	0,27
Slunce – Země	720	11 726
Země – Měsíc	38	30,2
Slunce – hvězdy	1 036 800	$3 \cdot 10^9$

Eratosthenés

■ Eratosthenés z Kyrény (276–194)

Matematik, astronom, geograf, kartograf, chronolog, gramatik, historik, etik, básník, atd., vychovatel syna Ptolemaia III., správce alexandrijské knihovny.

Zemřel prý v chudobě (dobrovolně?, hladově?).

Sebe nazýval: *Filologos* – přítel slova, učenec.

Přezdívky: *Pentathlos*, *Beta*.

Pod výrazným vlivem Eukleida.

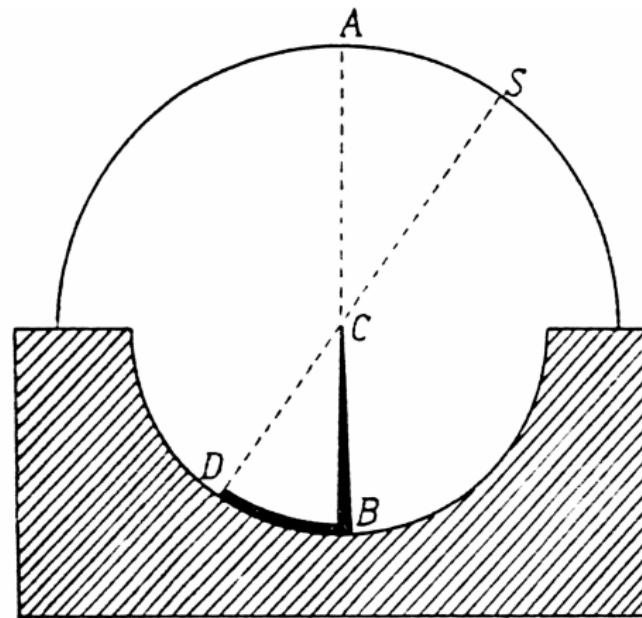
■ Eratosthenovo měření Země (kolem roku 220 př. Kr.)

Svědectví podávají:

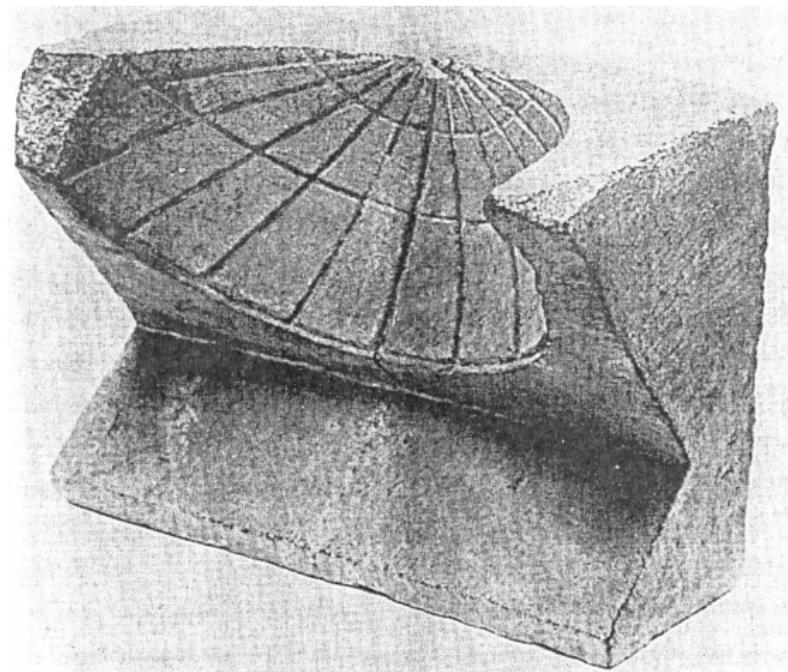
– Kleomedés z Knidu (2. stol. př. Kr.),

– Martianus Capella (5. stol. po Kr.) a další.

■ Skafé



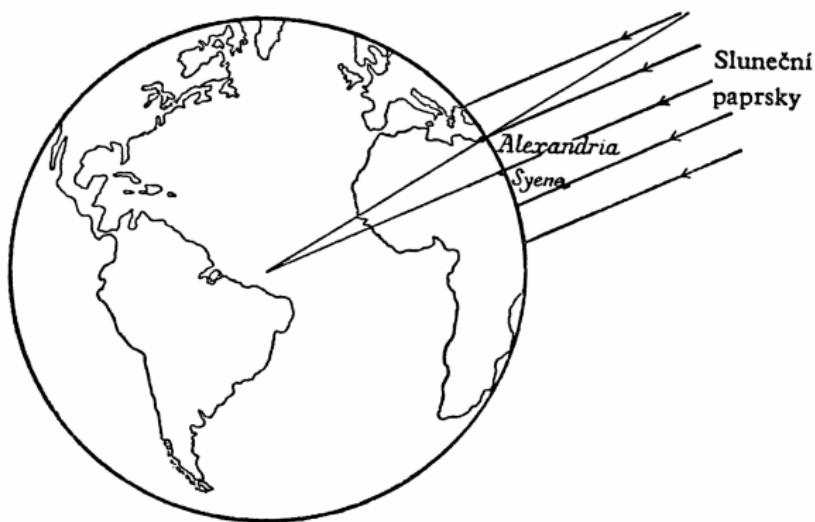
■ Římské skafé



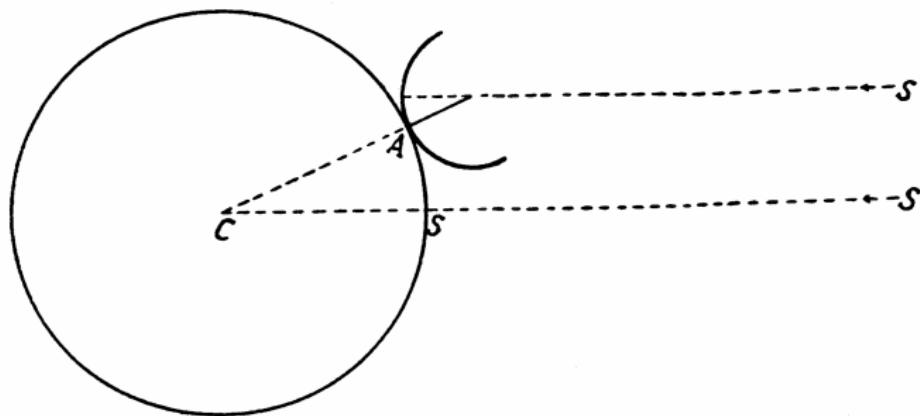
■ Předpoklady

1. Syena (dnešní Asuán) leží přesně na jih od Alexandrie.
2. Jejich vzdálenost je 5 000 stadií.
3. Syena leží na obratníku Raka, neboť gnómon v poledne za letního slunovratu nevrhá stín (*Slunce svítí do studní*).
4. Stín gnomonu v Alexandrii je ve stejném okamžiku odchýlen od svislice o jednu padesátinu kruhu.

■ Situace



■ Užití skafé



■ Hlavní výsledek

Obvod Země je 250 000 stadií – po přepočtu zhruba 40 000 kilometrů. (Obvod poledníkové elipsy Země je asi 40 003 km.)

Upraveno na 252 000 stadií, aby jeden stupeň měřil 700 stadií ($360 \cdot 700 = 252\,000$).

Metoda zcela správná, menší nepřesnosti neměly podstatný vliv na výsledek.

■ Hlavní výsledek

Obvod Země je 250 000 stadií – po přepočtu zhruba 40 000 kilometrů. (Obvod poledníkové elipsy Země je asi 40 003 km.)

Upraveno na 252 000 stadií, aby jeden stupeň měřil 700 stadií ($360 \cdot 700 = 252\,000$).

Metoda zcela správná, menší nepřesnosti neměly podstatný vliv na výsledek.

■ Z Eratosthenova měření vyplynula představa o absolutních velikostech a vzdálenostech Slunce a Měsíce.

■ Nedostatky Eratosthenova postupu (z exaktního hlediska)

- Zploštění Země.
- Syena a Alexandrie neleží na jednom poledníku. Syena je asi 3° východněji.
- Syena není na obratníku (je asi půl stupně severněji).
- Vzdálenost není přesně 5 000 stadií.
- Úhel není přesnou padesátinou kruhu (tj. $7^\circ 12'$), ale jen $7^\circ 7'$.

Chyby se však spíše vyrušily, Eratosthenův výsledek je velmi dobrý.

■ Nejasnost v použitých mírách

Míra *stadion* je vzdálenost konců závodiště. Jaké stadion však bylo uvažováno?

olympijské	192,27 m	obvod Země	48.452 km
attické	177,60 m		44.752 km
řecko-římské	185,00 m		46.620 km
egyptské	157,50 m		39.690 km

Má tato úvaha vůbec smysl? Vzdálenost určena odhadem!

■ Jiné odhady a jiná měření velikosti Země

Aristotelés: obvod Země je 400 000 stadií (*De caelo*)

Hipparchos (asi 190–125), astronom a matematik činný na Rhodu a v Alexandrii uvádí delší obvod.

Poseidónios Rhodský (135–50), stoický filozof

– Podle kulminace hvězdy Canopus v Alexandrii a na Rhodu (1/48 kruhu) a podle odhadu délky části poledníku.

Informace se liší:

– Strabón (*Geografika*) uvádí 180 000 stadií

– Kleomedés (*De motu circulari corporum caelestium*) uvádí 240 000 stadií

Ptolemaios (asi 100–170): uvádí 180 000 stadií (jeden stupeň je 500 stadií)

Literatura

J. Pollard, H. Reid: Vzestup a pád Alexandrie. Nakladatelství DEUS, Praha 2008, 235 stran.

Eukleides: *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Přeložil František Servít. Jednota českých matematiků, Praha, 1907, 315 stran.

J. Bečvář, I. Štoll: Archimedes. Největší vědec starověku, edice Velké postavy vědeckého nebe, sv. 11, Prometheus, Praha, 2005.

Archimedes: Počet pískový, přeložil M. Valouch, Výroční zpráva gymnázia v Litomyšli 1905/06, reprint: Matice technická, Praha, 1993.

T. L. Heath: Aristarchus of Samos. The Ancient Copernicus, Oxford, 1913, reprint: Dover, New York, 1981.

J. Hamel: Geschichte der Astronomie, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998; 2. vydání: Kosmos, Stuttgart, 2002.



T. L. Heath: Greek Astronomy, Dent, London, 1932, reprint:
Dover, New York, 1991.

A. van Helden: Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from
Aristarchus to Halley, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

B. Goldstein: Eratosthenes on the Measurement of the Earth,
Historia Mathematica 11(1984), 411–416.

M. J. Crowe: Theories of the World from Antiquity to the
Copernican Revolution, Dover, New York, 1990.

T. L. Heath: *A history of Greek Mathematics I, II*. Clarendon Press,
Oxford, 1921, reprint: Dover Publication, Inc., New York, 1981

L. N. H. Bunt, P. S. Jones, J. D. Bedient: *The Historical Roots of
Elementary Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs,
New Jersey, 1976; Dover Publications, Inc., New York, 1988.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

A ZA KVĚTINOVÉ DARY!